Limitné procesy v diferenciálnej geometrii

Rastislav Halamiček

2010

Limitné procesy v diferenciálnej geometrii

diplomová práca

Rastislav Halamiček

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Študijný odbor 9.1.1 Matematika

Vedúci diplomovej práce
doc. RNDr. **Miloš Božek**, PhD.

BRATISLAVA 2010

Poďakovanie

Ďakujem môjmu skvelému vedúcemu diplomovej práce, doc. RNDr. **Milošovi Božekovi**, PhD., za všetko, čo sa od neho môžem učiť. Spolupráca s ním pre mňa bola jedným z najvzácnejších zážitkov na fakulte.

Ďakujem mojej manželke **Miriam**, v ktorej nachádzam oporu a povzbudenie pre akúkoľvek kreatívnu činnosť, ktorej sa venujem, a ktorá sa úprimne raduje vždy, keď niečo dokončím.

Ďakujem môjmu milému bratovi **Radovi**, že je taký dobrý brat. Vďaka patrí aj **rodičom** za ich každodennú starostlivosť, nekonečnú trpezlivosť a neústupčivú láskavosť.

Ďakujem najväčšiemu **Geometrovi**, ktorého v literature nazývajú aj **A a Ω,** za celý môj život.

Abstract

HALAMIČEK, Rastislav. *Limit processes in differential geometry* [diploma thesis]. Commenius University Bratislava. Faculty of mathematics, physics and computer science; Department of algebra, geometry and didactics of mathematics. Under supervision of: doc. RNDr. Miloš Božek, PhD. Bratislava: Fmfi UK, 2010. 28 s

The thesis focuses on definitions of several basic terms specific to differential geometry. The author formulates theorems that clarify these definitions in an intuitively acceptable way. The theorems are based on geometrical ideas, that are historical predecessors of the modern definitions. All of the theorems include the idea of limit process and are proved using calculus methods.

Key terms: tangent line, osculating plane, osculating circle, center of curvature, envelope, limit.

Abstrakt

HALAMIČEK, Rastislav. *Limitné procesy v diferenciálnej geometrii* [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Miloš Božek, PhD. Bratislava: Fmfi UK, 2010. 28 s

Práca sa zaoberá definíciami základných pojmov z diferenciálnej geometrie. Vyslovuje niekoľko matematických viet, ktoré intuitívne prijateľným spôsobom vysvetľujú geometrický význam týchto pojmov. Vety sú upresnením historicky starších definícií príslušných pojmov. Obsahujú myšlienku limitného procesu a sú dokazované metódami diferenciálneho počtu.

Kľúčové slová: dotyčnica, oskulačná rovina, oskulačná kružnica, stred krivosti, obálka sústavy priamok, limita.

Predhovor

V roku 1900 predložil David Hilbert matematickému svetu zoznam 23 otvorených problémov. Väčšinu problémov z tejto legendárnej zbierky sa podarilo matematikom v priebehu 20. storočia vyriešiť.

V roku 2000 vypísal Clayov matematický inštitút odmeny po milióne dolárov na sedem otvorených matematických problémov súčasnosti. Slávny anglický profesor a popularizátor matematiky Ian Stewart sa v eseji *Matematika v roku 2050* zamýšľa nad smerovaním matematického bádania v 21. storočí a všíma si aj týchto sedem otvorených otázok. Dokonca si trúfa odhadovať, ktoré zo siedmich problémov nasledujúcim päťdesiatim rokom odolajú, a ktoré nie. O Poincarého domnienke háda, že odolá. V čase, keď bola Stewartova esej ako súčasť zbierky *The Next Fifty Years* v tlači, publikoval Grigorij Pereľman na arxiv.org prvé zo série niekoľkých prác, ktorých výsledkom bolo, okrem iného, aj potvrdenie Poincarého domnienky. Pereľman vo svojich článkoch pracoval s Riemannovou geometriou, čo je jedna zo súčasných vetiev diferenciálnej geometrie.

Také vzrušujúce je dianie okolo súčasnej diferenciálnej geometrie! V tejto práci sa však budeme zaoberať skôr základmi tejto matematickej disciplíny. Niektoré myšlienky a pojmy diferenciálnej geometrie existovali už v časoch antického Grécka. V pravom zmysle slova sa však diferenciálna geometria zrodila až niekedy v 17. storočí. Aj úplne základné pojmy však odvtedy prešli určitými zmenami. To nie je žiadne prekvapenie, keď si uvedomíme, akými zmenami medzitým prešla celá matematika. Stačí si pripomenúť, že epsilon-delta metódu výpočtu limity zaviedol Bolzano niekedy na začiatku 18. storočia, a vektory, ktoré sú fundamentom nášho súčasného chápania analytickej geometrie vynašiel Grassman v polovici 19. storočia.

Takéto vycibrenie matematického jazyka v priebehu storočí má dva protichodné dôsledky: na jednej strane je manipulácia s mnohými objektami pohodlnejšia a presná. Na strane druhej, už aj definície takých základných pojmov ako dotyčnica, či oskulačná kružnica sú pomerne vzdialené od svojej pôvodnej geometrickej interpretácie. Túto geometrickú ideu jednoducho za dnešnými učebnicovými definíciami cez to množstvo vektorov a derivácií tak ľahko nevidno.

Dobrý učiteľ, či správna učebnica, samozrejme, na geometrický obsah definície upozornia. V tejto práci dokazujeme, že tak môžu robiť s čistým svedomím. Zamerali sme sa na niekoľko základných pojmov z diferenciálnej geometrie, a dokázali sme ekvivalenciu moderných definícií s (upresnenými) geometrickými formuláciami. Učinili sme tak zadosť potrebe názornosti aj presnosti.

Obsah

Obsah 1

1. Úvod 2
   1.1 Definícia krivky 2
   1.2 Obsah práce 2

2. Dotyčnica ako limitná poloha sečnice 4

3. Oskulačná rovina 7

4. Stred krivosti 11

5. Oskulačná kružnica 16

6. Obálka jednoparametrickej sústavy priamok 20

7. O ilustráciách a CD prílohe 25

8. Záver 26

9. Zoznam použitej literatúry 28

1. Úvod

1.1 Definícia krivky

Celá práca sa týka kriviek, preto by sme ako prvú mali uviesť definíciu krivky. Prevezmime definíciu z [4], ale nie bez diskusie:

Definícia 1.1 Množinu $k \subset \boldsymbol{E}^3$ nazývame krivkou v $\boldsymbol{E}^3$ triedy C^n ak existuje aspoň jedna bodová funkcia $P(t)$ triedy C^n, ktorej definičným oborom je otvorený interval $I \subseteq \mathbb{R}$, pre ktorú $P: I \to \boldsymbol{E}^3$ je prosté zobrazenie na množinu k, a $P'(t) \neq \mathbf{0}$ v každom bode t z I.

Bodová funkcia P sa nazýva parametrizáciou krivky k a odráža fyzikálny pohľad na krivku ako na dráhu hmotného bodu v priestore. Táto dráha je určená bodovou funkciou $P(t)$ tak, že pre daný čas t_0 udáva jeho polohu $P(t_0)$. Ako ďalej uvádza Budinský, v zmysle tejto predstavy podmienka prostosti zobrazenia P popisuje skutočnosť, že krivka samu seba nepretína, a podmienka regulárnosti zas, že pohybujúci sa bod má „*stále nenulovú rýchlost*".

Prejdime k problematickej stránke. Definícia vníma krivku ako množinu bodov v priestore. Parametrizácia túto množinu istým spôsobom opisuje. Je rozumné, že za krivku nepokladáme samotnú bodovú funkciu, pretože rovnaká množina bodov priestoru sa môže dať vyjadriť rôznymi bodovými funkciami. Aj v tejto práci sa viackrát stretneme s *reparametrizáciou* krivky – teda prejdeme z jedného jej parametrického vyjadrenia na iné, pretože to bude z výpočtového hľadiska výhodné. Krivku ako takú však zachováme – nová parametrizácia bude stále určovať tú istú množinu bodov v priestore a nezmení ani vlastnosti krivky (krivosť, dotyčnice...). A práve tu je nedostatok definície krivky, ktorú sme uviedli – vzťah vlastností krivky a jej parametrizácie. Existujú totiž množiny bodov v priestore, ktoré sa dajú parametrizovať aspoň dvoma rôznymi spôsobmi tak, že množina bodov krivky ostane zachovaná, ale vlastnosti krivky budú iné. Pritom krivka bude vyzerať rovnako [1]. Preto nebudeme stotožňovať krivku ani s množinou bodov.

Nadbytočným predpokladom uvedenej definície je podmienka injektívnosti zobrazenia P. My sa v texte iba na krivky bez samopriesekov obmedzovať nebudeme. Chápme teda krivku ako objekt, ktorý je parametricky daný hladkou bodovou funkciou $P: I \to \boldsymbol{E}^3$, resp. $P: I \to \boldsymbol{E}^2$, kde I je ľubovoľný interval na číselnej osi. Bodmi krivky rozumieme obraz intervalu I v zobrazení P. Krivku nestotožňujeme ani s jej parametrizáciou ani s bodmi, ktoré určuje. Máme pritom na zreteli, že jedna krivka môže byť daná rôznymi parametrizáciami, a že vo veľmi špeciálnych prípadoch dve rôzne krivky môžu určovať rovnakú množinu bodov priestoru, resp. roviny.

1.2 Obsah práce

Cieľom celej tejto práce je geometricky interpretovať niekoľko pojmov z diferenciálnej geometrie pomocou limitného procesu. Cesta k tomuto cieľu je zmapovaná v nasledujúcich kapitolách. Ich obsah je, stručne, takýto:

V kapitole o dotyčnici dokážeme, že dotyčnicu ku krivke P môžeme chápať ako limitnú polohu sečnice krivky P cez bod $P(t_0)$ a bod $P(t)$, pre t z rýdzeho okolia t_0, ktoré sa „blíži“ k t_0.

V kapitole o oskulačnej rovine definujeme špeciálnu rovinu $\pi(t)$, ktorej limitnou polohou pre t blížiace sa k t_0 je oskulačná rovina krivky v bode $P(t_0)$.

S pojmom stredu krivosti sa vysporiadame dvakrát – pre rovinný aj pre priestorový prípad. Stred krivosti planárnej krivky pre neinflexný bod možno získať ako limitnú polohu bodu $X(t, t_0)$, ktorý je priesečníkom normál ku krivke vedeným cez body $P(t)$ a $P(t_0)$. V priestorovej verzii tvrdenia je bod $X(t, t_0)$ definovaný ako priesečník normálovej roviny ku krivke v bode $P(t)$ a normály ku krivke v bode $P(t_0)$.

Oskulačnú kružnicu priestorovej krivky predstavíme ako limitnú polohu kružnice, ktorej stred leží v normálovej rovine neinflexného bodu $P(t_0)$, a ktorá prechádza bodmi $P(t_0)$ a $P(t)$.

V poslednej teoretickej kapitole sa budeme venovať obálkam jednoparametrickej sústavy priamok. Body obálky možno tiež získať limitným procesom. V sústave „fixujeme“ parameter $\alpha_0 \in J$. Limitnou polohou priesečníka priamok p_{α_0} a p_α pre čísla α z okolia α_0 v intervale parametrov J, pre $\alpha \to \alpha_0$ je naozaj bod obálky sústavy.

Poslednou časťou práce je niekoľko malých animácií, ktoré majú uľahčiť chápanie opísaných limitných dejov, a predstavíme ich v samostatnej kapitole. Animácie sa nachádzajú v prílohe na CD.

2. Dotyčnica ako limitná poloha sečnice

Pojem dotyčnice ku krivke je na intuitívnej úrovni jasný určite každému, kto už aspoň raz zažil nedotáčavý šmyk pri jazde v zákrute, kto skúšal strieľať s odstredivým prakom, kto na strednej škole derivoval a kreslil dotyčnice ku grafom. Zbežný pohľad do histórie by ukázal, že dotyčnicami (ku kužeľosečkám) sa zaoberali už antickí matematici. Význam dotyčníc opäť narástol na začiatku sedemnásteho storočia súbežne s rozvojom optiky, mechaniky a geometrie. V optike sa vyskytoval problém smeru svetelného lúča, ktorý sa len dotkne povrchu šošovky, v mechanike sa smer pohybu bodu po krivke v každom bode rovná smeru dotyčnice ku krivke v danom bode. Znamená to, že ak by naň prestali pôsobiť v danom bode všetky sily (alebo by boli navzájom vyvážené), bod by sa pohyboval ďalej po dotykovej priamke. V geometrii našli dotyčnice využitie napríklad pri definovaní uhla dvoch kriviek v spoločnom bode (ich uhol sa rovná uhlu ich dotyčníc v danom bode).

Jedno z pôvodnejších chápaní dotyčnice hovorilo o dotyčnici ako o spojnici dvoch nekonečne blízkych bodov krivky. Aj Pierre de Fermat vo svojom postupe (ktorý bol zároveň definíciou) na hľadanie dotyčnice z roku 1629 vyjadruje túto myšlienku. Jeho postup pre grafy funkcií jednej premennej by sa dal zhrnúť takto [13]:

1. Vyrátajme smernicu sečnice prechádzajúcej dotykovým bodom T a iným blízkym bodom Q.
2. Nájdime limitu hodnoty smernice pre Q blížiace sa k T.
3. Ak limita existuje, tak priamka prechádzajúca bodom T so smernicou rovnou tejto limite, je dotyčnicou ku krivke v bode T.

Takéto vyjadrenie približuje aj pôvod pomenovania dotyčnice – *tangenty*. Tangenta z latinského *tangō* znamená *dotýkať sa*. Dotyčnica je teda priamka, ktorá sa krivky v danom bode len „dotýka“, má s ňou „rovnaký smer“, je k nej „najtesnejšie priložená“.

Presná definícia dotyčnice, ktorú si teraz uvedieme (voľne podľa [4]) na prvý pohľad tieto pekné kvality nijako nevystihuje:

Definícia 2.1 Nech P je krivka určená parametrizáciou

$$P = P(t),\, t \in I \subset \mathbb{R}$$

Nech je na krivke daný bod $P(t_0)$, taký, že $P'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Potom vektor $P'(t_0)$ nazývame dotykovým vektorom ku krivke P v bode $P(t_0)$. Priamku určenú bodom $P(t_0)$ a dotykovým vektorom $P'(t_0)$ nazývame *dotyčnicou* ku krivke P v bode $P(t_0)$.

Dokážeme tvrdenie, že limitnou polohou sečnice krivky P cez bod $P(t_0)$ a bod $P(t)$, ktorý sa „blíži“ k bodu $P(t_0)$ je skutočne priamka vyhovujúca uvedenej definícii dotyčnice ku krivke P v bode $P(t_0)$. Kým upresníme a dokážeme toto tvrdenie, podarí sa nám dokonca objasniť, prečo sa dotyčnica definuje len v takom bode $P(t_0)$, v ktorom $P'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

Budeme hľadať limitnú polohu sečnice krivky P cez body $P(t_0)$ a $P(t)$. Na to, aby takto opísaným objektom bola skutočne jednoznačne určená priamka, musí platiť, že $P(t_0) \neq P(t)$. No a presne túto vlastnosť nám zabezpečí podmienka nenulovej derivácie v bode $P(t_0)$.

Lema 2.2 Je daná krivka určená parametrizáciou $P(t)$ na intervale I. Nech je bod $P(t_0)$ regulárny. Potom existuje také $\delta>0$, že

$$\forall t \neq t_0, t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \text{ platí, že } P(t) \neq P(t_0).$$

Dôkaz. Tvrdenie dokazujeme nepriamo:

Nech pre každé $\delta>0$ existuje také t_δ z intervalu $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ rôzne od t_0, že $P(t_\delta) = P(t_0)$. Potom možno vytvoriť takú nekonečnú postupnosť bodov $\{P(t_{\delta_i})\}_{i=1}^{\infty}$ z do seba zapadajúcich intervalov $(t_0 - \delta_i, t_0 + \delta_i)$, že $P(t_{\delta_i}) = P(t_0)$ pre všetky členy tejto postupnosti. To, že body berieme z intervalov zapadajúcich do seba znamená, že limitou t_{δ_i} pre $i\to\infty$ je t_0.

Už si len stačí spomenúť na Heineho definíciu limity. Vraví, že lim $f(x) = L$ práve vtedy, keď pre každú postupnosť bodov $\{x_i\}$ z definičného oboru konvergujúcu k x platí, že postuponsť funkčných hodnôt $\{f(x_i)\}$ konverguje k L. Nám sa podarilo nájsť takú postupnosť bodov t_{δ_i} konvergujúcich k t_0, že postupnosť funkčných hodnôt $\dfrac{P(t_{\delta_i})-P(t_0)}{t_{\delta_i}-t_0}$ konverguje k **0** (lebo *sa rovná* **0** pre každé i). Preto hľadaná limita alebo neexistuje, alebo sa rovná **0**. Prvá možnosť je v spore s hladkosťou parametrizácie P, druhá s regulárnosťou krivky v bode $P(t_0)$.

□

Teraz už môžeme prejsť k vysloveniu a dokazovaniu geometrickej vety o dotyčnici.

Veta 2.3 Je daná krivka P určená parametrizáciou $P(t)$ na intervale I. Nech je bod $P(t_0)$ regulárny. Potom limitnou polohou sečnice krivky P cez bod $P(t_0)$ a bod $P(t)$, pre t z rýdzeho okolia t_0, ktorý sa „blíži" k bodu $P(t_0)$ je dotyčnica ku krivke P v bode $P(t_0)$.

Je nutné poznamenať, že sme do vety zámerne vpustili malú nepresnosť v podobe formulácie „bod $P(t)$, ktorý sa *„blíži"* k bodu $P(t_0)$". Urobili sme tak v záujme geometrickej názornosti tvrdenia. Podobne je to so slovným spojením „limitná poloha sečnice". Čo je to za limitu? Obe nepresnosti odstránime v dôkaze, v ktorom uvedieme alternatívne, ale matematicky presné vyjadrenie tej istej myšlienky. Druhou nepresnosťou je nepresnosť zo zamlčania: neuviedli sme z akého okolia t_0 berieme body $P(t)$. Nuž, je to presne to okolie t_0, ktorého existenciu sme dokázali v predchádzajúcej leme. Zo všetkých takých okolí vyberáme najväčšie možné (v najlepšom prípade celý interval I).

Dôkaz vety. Nech $\varphi(t)$ je funkcia z I do intervalu $[0, \pi/2]$, ktorá každej hodnote parametru t z I priradí ***uhol sečnice*** krivky P cez body $P(t_0)$ a $P(t)$ ***s dotyčnicou*** v bode $P(t_0)$. Funkcia $\varphi(t)$ je už bežná reálna funkcia jednej premennej a teda môžeme rátať jej limitu[1], pričom očakávame, že sa dorátame k nulovému uhlu (uhol totožných priamok). Pre uhol φ priamok so smerovými vektormi **u** a **v** platí:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}.$$

1 V knižke [6] je na strane 84 v príklade 3 podrobne ukázané, že oblúková miera uhla φ, ktorý zvierajú 2 priamky zo zväzku priamok prechádzajúcich jedným bodom je metrikou, preto má pojem limity kosínusu uhla priamok naozaj zmysel.

Smerovým vektorom dotyčnice je $P'(t_0)$. Smerovým vektorom sečnice je vektor $(P(t) - P(t_0))$.Preto počítame nasledujúcu limitu:

$$\lim_{t \to t_0} \cos\varphi(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{|P'(t_0) \cdot (P(t) - P(t_0))|}{|P'(t_0)| \cdot |(P(t) - P(t_0))|}$$

V prvom kroku vynásobíme celý zlomok „vhodnou formou jednotky“:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{|P'(t_0) \cdot (P(t) - P(t_0))|}{|P'(t_0)| \cdot |(P(t) - P(t_0))|} = \lim_{t \to t_0} \frac{|P'(t_0) \cdot (P(t) - P(t_0))| \frac{1}{|t - t_0|}}{|P'(t_0)| \cdot |(P(t) - P(t_0))| \frac{1}{|t - t_0|}} = \ldots$$

Vhodne upravíme zlomok, a dorátame limitu. Tieto kroky by mali byť sprevádzané triezvymi úvahami o práci s absolútnou hodnotou a tiež s limitami, prípadne doplnené krátkym pohľadom do [8].

$$\ldots = \lim_{t \to t_0} \frac{|P'(t_0) \frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0}|}{|P'(t_0)| |\frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0}|} = \frac{|P'(t_0) \cdot P'(t_0)|}{|P'(t_0)| \cdot |P'(t_0)|} = 1$$

Posledná rovnosť si tiež vyžaduje malý komentár. Jednotka vpravo znamená, čitateľ a menovateľ posledného zlomku sa rovnajú. To vyplýva priamo z definície dĺžky vektora pomocou skalárneho súčinu.

Ukázali sme, že limita kosínusu uhlu $\varphi(t)$ pre pre $t \to t_0$ je 1, teda, že $\varphi(t) \to 0$. To znamená, že limitnou polohou sečnice krivky P cez bod $P(t_0)$ a bod $P(t)$ je naozaj dotyčnica v $P(t_0)$.

□

3. Oskulačná rovina

Oskulačná rovina je dôležitý pojem z diferenciálnej geometrie. Formálna definícia znie takto:

Definícia 3.1 Nech P je krivka určená parametrizáciou

$$P = P(t), t \in I \subset \mathbb{R}$$

Nech je na krivke daný neinflexný bod $P(t_0)$. Rovinu určenú bodom $P(t_0)$ a smerovými vektormi $P'(t_0)$ a $P''(t_0)$ nazývame *oskulačnou rovinou* ku krivke P v bode $P(t_0)$.

Neinflexný je taký bod, v ktorom sú vektory prvej a druhej derivácie lineárne nezávislé. V definícii oskulačnej roviny ide teda o celkom prirodzený predpoklad. Ako však táto rovina vyzerá a aký má význam?

Uvažujme teraz o inej rovine: Nech $\pi(t)$ je rovina prechádzajúca dotyčnicou ku krivke P v neinflexnom bode $P(t_0)$ a iným bodom krivky $P(t)$. Pre t blížiace sa k t_0 sa $P(t)$ blíži k $P(t_0)$ a rovina $\pi(t)$ sa otáča okolo dotyčnice. Limitnou polohou roviny $\pi(t)$ je oskulačná rovina krivky v bode $P(t_0)$ [2]. Podľa tejto úvahy teda môžeme oskulačnú rovinu priestorovej krivky v bode $P(t_0)$ chápať ako takú rovinu, ktorá je v tomto bode ku krivke „najtesnejšie priložená“. Keby krivka pre parameter z okolia t_0 „mohla byť planárnou, tak by ležala“ práve v oskulačnej rovine bodu $P(t_0)$. Preto sa aj nazýva oskulačná: *osculari* po latinsky znamená *bozkávať sa*. Cieľom tejto kapitoly bude upresniť a dokázať práve vyslovené tvrdenie o otáčajúcej sa rovine $\pi(t)$.

Najprv treba ukázať, že v neinflexnom bode $P(t_0)$ je rovina $\pi(t)$ dobre definovaná, teda, že $P(t)$ neleží na dotyčnici k bodu $P(t_0)$.

Lema 3.2 Je daná krivka určená parametrizáciou $P(t)$ na intervale I. Nech je bod $P(t_0)$ neinflexný. Potom existuje také $\delta>0$, že
$\forall t \neq t_0, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ platí, že $P(t) - P(t_0)$ a $P'(t_0)$ sú lineárne nezávislé vektory.

Dôkaz.

Prv, než sa pustíme do dôkazu, ukážme si zaujímavú identitu (podľa [4]), ktorú v dôkaze použijeme:

$$\lim_{t \to t_0} 2 \frac{[P(t) - P(t_0)] - (t - t_0) P'(t_0)}{(t - t_0)^2} = P''(t_0)$$

O pravdivosti sa môžeme presvedčiť dvojnásobným použitím L'Hospitalovho pravidla:

$$\lim_{t \to t_0} 2 \frac{[P(t) - P(t_0)] - (t - t_0) P'(t_0)}{(t - t_0)^2} = \lim_{t \to t_0} 2 \frac{P'(t) - P'(t_0)}{2(t - t_0) \cdot 1} = \lim_{t \to t_0} \frac{P''(t)}{1} = P''(t_0)$$

Pristúpme teraz k dôkazu lemy. Opäť nepriamo: Nech pre každé n existuje $t_n \neq t_0$ z intervalu $(t_0 - 1/n,\ t_0 + 1/n)$ také, že $[P(t_n) - P(t_0)] = k_n P'(t_0)$. Limitou t_n pre $n \to \infty$ je t_0. Identita, dokázaná vyššie potom nadobúda nasledujúci tvar:

$$P''(t_0) = \lim_{n\to\infty} 2\frac{[P(t_n) - P(t_0)] - (t_n - t_0)P'(t_0)}{(t_n - t_0)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(k_n - t_n + t_0)}{(t_n - t_0)^2} P'(t_0)$$

To ale znamená, že ak druhá derivácia v t_0 existuje, tak $P''(t_0)$ je násobkom $P'(t_0)$, teda vektory nie sú lineárne nezávislé.

□

Ukázali sme, že rovina $\pi(t)$ je v neinflexnom bode $P(t_0)$ definovaná dobre a pre nejaké t z okolia čísla t_0 z definičného oboru naozaj existuje, a preto má zmysel uvažovať o jej limitnej polohe pre $t \to t_0$. V dôkaze tvrdenia však spravíme netriviálny trik využívajúci špeciálny tvar Taylorovho vzorca.

Taylorov vzorec slúži na približné vyjadrenie reálnej funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v okolí bodu a pomocou polynómov. Nech má funkcia f v bode a derivácie až do n-tého rádu, kde n je prirodzené číslo. Definujme Taylorov aproximačný polynóm [8]:

$$p(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Ak chceme pôvodnú funkciu nahradiť presne, musíme pridať na koniec rozvoja ešte jeden člen, zvyšok:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_{(n+1)}(x)$$

Práve tvar zvyšku je to, čo robí úvahy závažnými. Zvyšok hovorí o tom, ako presne funkciu v okolí bodu a vzorec aproximuje. Nie vždy je nutné presne vedieť, aký veľký je rozdiel $p(x) - f(x)$, niekedy nás zaujíma len „kvalita“ tohto rozdielu.

Bodovú funkciu $P(t)$ možno chápať ako tri reálne funkcie: $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Funkcie $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ sa dajú napísať v Taylorovom rozvoji s všeobecným tvarom zvyšku. Namiesto troch riadkov pre jednotlivé súradnice skrátene vyjadrime celú bodovú funkciu $P(t)$ takto:

$$P(t) = P(t_0) + P'(t_0)\frac{t - t_0}{1!} + P''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!} + \boldsymbol{\omega}(t)$$

Použili sme len prvé dve derivácie a zvyšok sme označili $\boldsymbol{\omega}(t)$. Je nutné podotknúť, že $\boldsymbol{\omega}(t)$ je vektorová funkcia s troma zložkami $\boldsymbol{\omega}(t) = (x_\omega(t), y_\omega(t), z_\omega(t))$. V takomto tvare zvyšok bližšie nešpecifikujeme, zmieňujeme len jednu jeho kvalitu:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{(t - t_0)^2} = \mathbf{0}$$

Teraz môžeme vektor $P(t) - P(t_0)$ napísať v tvare, ktorý sa ukáže byť veľmi výhodným pre dôkaz hlavnej vety tejto kapitoly:

$$P(t) - P(t_0) = P'(t_0)\frac{t-t_0}{1!} + P''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \boldsymbol{\omega}(t)$$

Veta 3.3 Je daná krivka P určená parametrizáciou $P(t)$ na intervale I. Nech je bod $P(t_0)$ neinflexný. Rovina $\pi(t)$ je určená dotyčnicou ku krivke v $P(t_0)$ a bodom $P(t)$, pre t z okolia čísla t_0. Potom limitnou polohou roviny $\pi(t)$, pre $t \to t_0$ je oskulačná rovina ku krivke P v bode $P(t_0)$.

Dôkaz.

Nech $\varphi(t)$ je funkcia z I do intervalu $[0, \pi/2]$, ktorá každej hodnote parametra t z okolia t_0 priradí uhol *roviny* $\pi(t)$ a oskulačnej roviny krivky P v bode $P(t_0)$. Uhol rovín počítame ako uhol priamok kolmých na tieto roviny.

Normálový vektor oskulačnej roviny má tvar $P'(t_0) \times P''(t_0)$.

Normálový vektor roviny $\pi(t)$ má tvar $P'(t_0) \times (P(t) - P(t_0))$.

Absolútna hodnota kosínusu uhla týchto vektorov je kosínus uhola roviny $\pi(t)$ a oskulačnej roviny. Počítajme teda limitu:

$$\lim_{t \to t_0} \cos\varphi(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{|(P'(t_0) \times P''(t_0)) \cdot [P'(t_0) \times (P(t) - P(t_0))]|}{|P'(t_0) \times P''(t_0)| \cdot |P'(t_0) \times (P(t) - P(t_0))|} = \ldots$$

Vektor $P(t) - P(t_0)$ nahradíme identitou, ktorú sme uviedli pred vyslovením vety:

$$\ldots = \lim_{t \to t_0} \frac{|(P'(t_0) \times P''(t_0)) \cdot [P'(t_0) \times (P'(t_0) \cdot (t-t_0) + P''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + \boldsymbol{\omega}(t))]|}{|P'(t_0) \times P''(t_0)| \cdot |P'(t_0) \times (P'(t_0) \cdot (t-t_0) + P''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + \boldsymbol{\omega}(t))|} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{|(P'(t_0) \times P''(t_0)) \cdot [P'(t_0) \times (\frac{P'(t_0)}{(t-t_0)} + \frac{P''(t_0)}{2} + \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{(t-t_0)^2})]|}{|P'(t_0) \times P''(t_0)| \cdot |P'(t_0) \times (\frac{P'(t_0)}{(t-t_0)} + \frac{P''(t_0)}{2} + \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{(t-t_0)^2})|} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{|(P'(t_0) \times P''(t_0)) \cdot [P'(t_0) \times P'(t_0)\frac{1}{(t-t_0)} + P'(t_0) \times P''(t_0)\frac{1}{2} + P'(t_0) \times \boldsymbol{\omega}(t)\frac{1}{(t-t_0)^2}]|}{|P'(t_0) \times P''(t_0)| \cdot |P'(t_0) \times P'(t_0)\frac{1}{(t-t_0)} + P'(t_0) \times P''(t_0)\frac{1}{2} + P'(t_0) \times \boldsymbol{\omega}(t)\frac{1}{(t-t_0)^2}|} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left|(P'(t_0)\times P''(t_0))\cdot(P'(t_0)\times P''(t_0))\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}\left|P'(t_0)\times P''(t_0)\right|\cdot\left|(P'(t_0)\times P''(t_0))\right|}} = 1$$

Ukázali sme, že limita kosínusu uhla $\varphi(t)$ pre $t\to t_0$ je 1, teda, že $\varphi(t)\to 0$. To znamená, že limitnou polohou roviny $\pi(t)$ je naozaj oskulačná rovina krivky v $P(t_0)$.

□

4. Stred krivosti

V tejto kapitole si rozoberieme ďalší významný pojem – *stred krivosti*. Je to termín úzko spätý s termínom *krivosť krivky*, a tú matematici študujú už od čias Antiky. V priebehu histórie sa ňou zaoberalo množstvo hviezdnych matematikov od Appollónia z Pergé, cez Keplera, Fermata a Descartesa, až po Huygensa, Leibniza, Newtona, Eulera a Gaussa [11].

Definícia 4.1 Nech P je krivka daná parametrizáciou

$$P=P(t),\, t\in I\subset\mathbb{R}$$

Krivosť krivky P je funkcia určená takto:

$$k(t)=\frac{|P'(t)\times P''(t)|}{|P'(t)|^3}$$

V neinflexnom bode $P(t_0)$ krivky P definujeme aj pojmy:

vektor krivosti $\mathbf{k}(t_0)=k(t_0)\mathbf{n}(t_0)$, kde $\mathbf{n}(t_0)$ je normálový vektor,
polomer krivosti $r(t_0) = 1/k(t_0)$,
stred krivosti $S(t_0) = P(t_0) + r(t_0)\mathbf{n}(t_0)$.

V definícii krivosti sa vyskytol vektorový súčin. Ten však nie je definovaný pre dvojrozmerné vektory. Rovinný vzorec pre krivosť sa ale dá z priestorového jednoducho odvodiť. Dvojrozmerné vektory môžeme chápať ako taký vektorový podpriestor trojrozmerného vektorového priestoru, v ktorom majú všetky vektory jednu súradnicu nulovú. Vzorec krivosti teda bude vyzerať takto:

$$k(t)=\frac{|P'(t)\times P''(t)|}{|P'(t)|^3}=\frac{|(x'(t),y'(t),0)\times(x''(t),y''(t),0)|}{|(x'(t),y'(t),0)|^3}=\frac{\left|\left(0,0,\begin{vmatrix}x'(t) & y'(t)\\ x''(t) & y''(t)\end{vmatrix}\right)\right|}{\left(\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\right)^3}=$$

$$=\frac{\left|\begin{vmatrix}x'(t) & y'(t)\\ x''(t) & y''(t)\end{vmatrix}\right|}{\left(\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\right)^3}$$

Krivosť (prvá krivosť) krivky vypovedá o tom, ako veľmi sa krivka v danom bode „ohýba“[2], preto sa jej niekedy zvykne hovoriť aj *flexia* (teraz vidíme, prečo sa bodu s lineárne závislými vektormi prvej a druhej derivácie hovorí *inflexný* [2]). Krivosť krivky v bode $P(t_0)$ je reálne číslo $k(t_0)$. Krivosť ako číselná hodnota však nie je veľmi prirodzeným opisom tvaru krivky. Ako vysvetliť hodnotu krivosti krivky v nejakom jej bode geometricky?

2 Presnejšie, ak chápeme krivku fyzikálne, ako pohyb hmotného bodu, tak prvá krivosť krivky je absolútna hodnota okamžitej rýchlosti zmeny smeru dotyčnice.[2]

Možno to urobiť najmenej dvoma spôsobmi (súvisia spolu). Prvému sa budeme venovať v tejto kapitole, druhý rozoberieme v nasledujúcej. Uvažujeme o normálovej priamke k planárnej krivke P v neinflexnom bode krivky $P(t_0)$ a o jej priesečníku s normálou vedenou iným bodom $P(t)$. Limitnou polohou takéhoto priesečníka pre $t \rightarrow t_0$ je stred krivosti krivky pre bod $P(t_0)$. Toto už je geometrickým vyjadrením flexie krivky P v bode $P(t_0)$. Intuitívne je jasné, že čím „rovnejšia“ je krivka v okolí $P(t_0)$, tým vzdialenejší bude stred krivosti, a čím „krivšia“, tým bude bližšie. Prevrátená hodnota vzdialenosti stredu krivosti od bodu $P(t_0)$ je číselná hodnota krivosti.

Samozrejme, s priesečníkom normál môžu nastať komplikácie – čo ak vôbec taký priesečník neexistuje? Na to, aby existoval, musia byť normály ku krivke P v bodoch $P(t_0)$ a $P(t)$ rôznobežné. O tom, kedy to tak je, hovorí táto lema:

Lema 4.2 Je daná planárna krivka P určená parametrizáciou $P(t)$ na intervale I. Nech je bod $P(t_0)$ neinflexný. Potom existuje také $\delta>0$, že

$\forall t \neq t_0, t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ platí, že normály ku krivke P v bode $P(t)$ a v bode $P(t_0)$ sú rôznobežky.

Dôkaz. Postupujeme nepriamo. Nech pre každé okolie O parametra t_0 existuje také t, že normály ku krivke P v bode $P(t)$ a v bode $P(t_0)$ sú rovnobežné. Potom sú v týchto bodoch rovnobežné aj dotyčnice k P. Dá sa teda zostrojiť do seba zapadajúca postupnosť okolí O_n parametra t_0 taká, že v každom okolí O_n existuje t_n, pre ktoré platí, že $P'(t_n)$ a $P'(t_0)$ sú lineárne závislé vektory. Analyticky vyjadrené $P'(t_n) = c_n.P'(t_0)$, pre vhodné c_n. Keď sa teraz na definíciu $P''(t_0)$ pozrieme cez Heineho definíciu limity, zistíme, že $P''(t_0)$ je násobkom $P'(t_0)$:

$$P''(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{P'(t_n)-P'(t_0)}{t_n-t_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n.P'(t_0)-P'(t_0)}{t_n-t_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n-1}{t_n-t_0} P'(t_0)$$

P''(t_0) je teda naozaj násobkom P'(t_0). To znamená bod $P(t_0)$ je inflexný.

□

Úvahu o strede krivosti možno zopakovať aj pre priestorové krivky. V priestore sa však ani nerovnobežné normály ku krivke P v bodoch $P(t_0)$ a $P(t)$ nemusia pretínať. Preto musíme myšlienku nasledovne upraviť: Nech bod $X(t, t_0)$ je priesečníkom normálovej roviny ku krivke v bode $P(t)$ a hlavnej normály k priestorovej krivke P v bode $P(t_0)$. Potom limitnou polohou bodu $X(t, t_0)$ pre $t \rightarrow t_0$ je stred krivosti krivky P pre bod $P(t_0)$.

Opäť sa vynára komplikácia s možnou rovnobežnosťou hlavnej normály v $P(t_0)$ a normálovej roviny v $P(t)$, ktorú rieši nasledujúca lema.

Lema 4.3 Je daná priestorová krivka P určená parametrizáciou $P(t)$ na intervale I. Nech je bod $P(t_0)$ neinflexný. Potom existuje také $\delta>0$, že

$\forall t \neq t_0, t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ platí, že hlavná normála ku krivke P v bode $P(t_0)$ a normálová rovina ku krivke P v bode $P(t)$ nie sú rovnobežné.

Dôkaz. Opäť postupujeme nepriamo. Predpokladajme teda, že pre každé okolie O parametra t_0 existuje také t, že hlavná normála ku krivke P v bode $P(t_0)$ a normálová rovina v bode $P(t)$ sú rovnobežné. Túto rovnobežnosť možno vyjadriť analyticky napríklad takto: $\mathbf{n}(t_0) = u(t).\mathbf{n}(t) + v(t).\mathbf{b}(t)$, pretože normálová rovina je určená práve vektormi hlavnej normály a binormály. Funkcie $u(t)$ a $v(t)$ sú vhodné číselné funkcie. Zaujímavý je vzťah dotyčnice ku krivke P v bode $P(t_0)$ a normálovej roviny v bode $P(t)$. Z kolmosti $\mathbf{n}(t_0)$ a $\mathbf{t}(t_0)$ po vynásobení predchádzajúcej rovnice $\mathbf{t}(t_0)$ vyplýva takýto vzťah:

$$0 = \mathbf{n}(t_0)\cdot\mathbf{t}(t_0) = [u(t)\mathbf{n}(t) + v(t)\mathbf{b}(t)]\cdot\mathbf{t}(t_0)$$

To však znamená, že dotyčnica k P v $P(t_0)$ je kolmá na normálovú rovinu ku krivke P v bode $P(t)$ pre nejaké t z každého okolia t_0. Teda existuje taká do seba zapadajúca postupnosť okolí O_n parametra t_0, že v každom okolí O_n existuje také t_n, že $P'(t_n)$ aj $P'(t_0)$ sú kolmé na $\mathbf{n}(t_0)$. Potom aj každý vektor $(P'(t_n) - P'(t_0)) / (t_n - t_0)$ je kolmý na $\mathbf{n}(t_0)$.

$$P''(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{P'(t_n) - P'(t_0)}{t_n - t_0}$$

Preto aj vektor $P''(t_0)$ je kolmý na $\mathbf{n}(t_0)$. Vektor $\mathbf{n}(t_0)$ je ale lineárnou kombináciou vektorov $P'(t_0)$ a $P''(t_0)$. Ak má byť kolmý na obidva tieto vektory a zároveň byť ich lineárnou kombináciou, musí platiť $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{0}$. A teda vektory $P'(t_0)$ a $P''(t_0)$ sú lineárne závislé, čo znamená, že bod $P(t_0)$ je inflexný.

□

Ďalšia poznámka sa týka prirodzenej parametrizácie krivky, ktorú odteraz budeme v dôkazoch pravidelne využívať. Prirodzená parametrizácia je taká parametrizácia, pre ktorú platí, že dĺžka časti krivky pre parameter z intervalu $\langle a, b\rangle$ sa rovná rozdielu $b - a$. Platí ekvivalencia medzi tvrdeniami, že $P(s)$ je prirodzená parametrizácia, a tvrdením, že $|P'(s)| = 1$ pre všetky s z definičného oboru. Ku každej regulárne parametrizovanej krivke existuje taká prirodzená reparametrizácia $P(s)$, že bodu $P(t_0)$ v pôvodnej parametrizácii zodpovedá bod $P(s_0)$ v tejto prirodzenej reparametrizácii [2], [4]. Aby sme v zápisoch jednoznačne vizuálne rozlíšili, či uvažujeme o bežnej alebo prirodzenej parametrizácii, budeme pre bežnú parametrizáciu používať naďalej zápis $P(t)$ a pre prirodzenú $P(s)$. Parameter s teda signalizuje prirodzenú parametrizáciu[3].

V prirodzenej parametrizácii vyzerajú niektoré veci inak. Uveďme si v skratke aspoň podobu Frenetovho trojhranu, vzorce pre krivosť a niektoré vlastnosti:

i. $\mathbf{t}(s) = P'(s)$, $\mathbf{n}(s) = P''(s)/|P''(s)|$, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s)\times\mathbf{n}(s)$, pre každé s z I,
ii. $k(s) = |P''(s)|$, $\mathbf{k}(s)=P''(s)$, $r(s) = 1/|P''(s)|$, pre každé s z I,
iii. $P''(s) \perp P'(s)$, pre každé s z I.[4]

---

3 Prečo práve písmenko *s*? Možno preto, lebo v prirodzenej parametrizácii sa hovorí o dĺžke krivky. Keď krivku chápeme fyzikálne – ako pohyb hmotného bodu – potom dĺžka časti krivky je vlastne dráhou, ktorú prešiel hmotný bod. Dráha sa vo fyzike bežne označuje písmenkom *s*.

Ponúknime si ešte jedno, alternatívne, vysvetlenie: Dĺžku krivky aproximujme lomenou čiarou vpísanou do krivky. Potom aproximáciou dĺžky krivky bude *suma* dĺžok úsečiek tejto lomenej čiary. Skutočnou dĺžkou krivky je potom *suprémom* dĺžok do krivky vpísaných lomených čiar. Aj zo slov *suma* alebo *suprémum* by teda mohlo pochádzať ono *s* označujúce parameter prirodzenej parametrizácie krivky.

4 Všetky tri body sa dajú dokázať jednoriadkovými odvodeniami a možno ich nájsť v [2].

Vďaka (nielen) týmto pekným vlastnostiam nachádza prirodzená parametrizácia bohaté využitie v riešení teoretických úvah. Aj my s ňou budeme pracovať v dôkazoch viet. Nájsť a presne vyjadriť prirodzenú parametrizáciu krivky nemusí byť jednoduché, dokonca je častokrát nemožné zapísať ju pomocou elementárnych funkcií. Pretože však existuje pre každú krivku, vo všeobecných dôkazoch ju využívať môžeme.

Veta 4.4 Je daná planárna krivka P určená parametrizáciou $P(t)$ na intervale I. Nech je bod $P(t_0)$ neinflexný. Nech bod $X(t, t_0)$ je priesečníkom normál ku krivke vedeným cez body $P(t)$ a $P(t_0)$. Potom limitnou polohou bodu $X(t, t_0)$ pre $t \to t_0$ je stred krivosti krivky P pre bod $P(t_0)$.

Podobnú vetu možno vysloviť aj pre priestorové krivky:

Veta 4.5 Je daná priestorová krivka P určená parametrizáciou $P(t)$ na intervale I. Nech je bod $P(t_0)$ neinflexný. Nech bod $X(t, t_0)$ je priesečníkom normálovej roviny ku krivke v bode $P(t)$ a hlavnej normály ku krivke v bode $P(t_0)$. Potom limitnou polohou bodu $X(t, t_0)$ pre $t \to t_0$ je stred krivosti krivky P pre bod $P(t_0)$.

Dôkaz.

Obidve vety dokážeme naraz. Prejdime k prirodzenej parametrizácii. Bod $X(s, s_0)$ možno vyjadriť v oboch prípadoch rovnakou parametrickou rovnicou:

$$X(s, s_0) = P(s_0) + f(s)\mathbf{n}(s_0),$$

kde $f(s)$ je vhodná číselná funkcia a plní úlohu parametra. Vektro hlavnej normály $\mathbf{n}(s_0)$ sa dá v prirodzenej parametrizácii vyjadriť jednoducho: $\mathbf{n}(s_0) = P''(s_0) / |P''(s_0)|$. Celý trik dôkazu spočíva v tom, že si uvedomíme a vhodne vyjadríme jedinú myšlienku: vektor $X(s, s_0) - P(s)$ je kolmý na smerový vektor krivky P v bode $P(s)$.

Tvrdenie o kolmosti vektorov, samozrejme, platí, lebo bod $X(s, s_0)$ leží na normálovej priamke[5] ku krivke cez bod $P(s)$. Dotykový vektor $\mathbf{t}(s)$ vyjadríme vďaka prirodzenej parametrizácii ako $P'(s)$. Vektory sú kolmé práve vtedy, keď je ich skalárny súčin rovný nule. Tým sme uviedli všetky úvahy potrebné k pochopeniu dôkazu viet:

$$[X(s, s_0) - P(s)] \cdot \mathbf{t}(s) = 0$$

$$\left[(P(s_0) + f(s)\frac{P''(s_0)}{|P''(s_0)|}) - P(s) \right] \cdot P'(s) = 0$$

$$\left[((P(s_0) - P(s)) + f(s)\frac{P''(s_0)}{|P''(s_0)|}) \right] \cdot P'(s) = 0$$

$$(P(s_0) - P(s)) \cdot P'(s) + f(s)\frac{P''(s_0)}{|P''(s_0)|} \cdot P'(s) = 0$$

$$f(s) = \frac{(P(s) - P(s_0)) \cdot P'(s)}{\frac{P''(s_0) \cdot P'(s)}{|P''(s_0)|}}$$

5 V rovinnej verzii vety leží $X(s, s_0)$ na *jedinej* normále k P cez bod $P(s)$. V priestorovom prípade leží $X(s, s_0)$ v normálovej rovine k P cez bod $P(s)$. V oboch prípadoch je teda vektor $X(s, s_0) - P(s)$ kolmý na smerový vektor dotyčnice k P v bode $P(s)$.

Teraz stačí už len dorátať limitu $f(s)$ pre $s \to s_0$:

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = \lim_{s \to s_0} \frac{(P(s) - P(s_0)) \cdot P'(s)}{\frac{P''(s_0) \cdot P'(s)}{|P''(s_0)|}} = \lim_{s \to s_0} \frac{(P(s) - P(s_0))' \cdot P'(s) + (P(s) - P(s_0)) \cdot P''(s)}{\frac{P''(s_0) \cdot P''(s)}{|P''(s_0)|}} =$$

$$= \lim_{s \to s_0} \frac{P(s)' \cdot P'(s) + (P(s) - P(s_0)) \cdot P''(s)}{\frac{P''(s_0) \cdot P''(s)}{|P''(s_0)|}} = \frac{P(s_0)' . P'(s_0) + (P(s_0) - P(s_0)) \cdot P''(s_0)}{\frac{P''(s_0) \cdot P''(s_0)}{|P''(s_0)|}} =$$

$$= \frac{1 + \mathbf{0} \cdot P''(s_0)}{\frac{|P''(s_0)|^2}{|P''(s_0)|}} = \frac{1}{|P''(s_0)|} = \frac{1}{k(s_0)}$$

Okrem prehľadného vyjadrenia smerového vektora a vektora hlavnej normály sme silu prirodzenej parametrizácie využili ešte v tom kroku, kde sme $P'(s_0) \cdot P'(s_0)$ nahradili 1. Mohli sme tak urobiť preto, lebo ekvivalentnou podmienkou pre prirodzenú parametrizáciu je práve identita $|P'(s)| = 1$ a $P'(s_0) \cdot P'(s_0)$ nie je nič iné ako $|P'(s)|^2$.

Dokázali sme platnosť dvoch viet v jednom dôkaze.

□

5. Oskulačná kružnica

V kapitole o *strede krivosti* sme naznačili, že existuje aj ďalší pojem úzko súvisiaci s *prvou krivosťou* krivky. *Oskulačná kružnica* pre bod $P(t_0)$ je taká kružnica, ktorej stred leží na hlavnej normále krivky v danom bode, a má polomer rovný prevrátenej hodnote krivosti krivky v $P(t_0)$.

Definícia 5.1 Nech P je krivka daná parametrizáciou

$$P = P(t), t \in I \subset \mathbb{R}$$

Oskulačnou kružnicou ku krivke P v jej bode $P(t_0)$ nazveme takú kružnicu $B(t_0)$, ktorá má tieto vlastnosti:

i. stred krivosti $S(t_0)$ je stredom kružnice $B(t_0)$
ii. $B(t_0)$ má polomer $r(t_0) = 1/k(t_0)$
iii. $B(t_0)$ a krivka P majú v spoločnom bode $P(t_0)$ spoločnú dotyčnicu

Takáto definícia pôsobí trochu rozvláčne. V literatúre sa vyskytuje kratšia definícia: Oskulačná kružnica ku krivke P v bode $P(t_0)$ je taká kružnica, ktorá s ňou má v tomto bode styk rádu 2. Naša definícia by však okamžite nasledovala ako veta. Keďže sa stykom kriviek v práci nezaoberáme nijako systematickejšie, zvolili sme si za východziu definíciu túto, pre praktické výpočty prehľadnejšiu, formuláciu. Tretí bod definície o spoločnej dotyčnici by sme rovnako dobre mohli nahradiť podmienkou, že kružnica leží v oskulačnej rovine krivky v bode $P(t_0)$. Geometrickú interpretáciu oskulačnej kružnice pre rovinnú krivku nájdeme v [2]. V tomto texte sa budeme ďalej zaoberať iba oskulačnou kružnicou pre priestorovú krivku.

Uvažujme o takejto kružnici: nech $B(t, t_0)$ je kružnica, ktorej stred $S(t, t_0)$ leží v normálovej rovine krivky pre bod $P(t_0)$, a ktorá zároveň prechádza rôznymi bodmi $P(t_0)$ a $P(t)$. Pre nejaké „fixované“ t_0 je teda $S(t, t_0)$ bodovou funkciou jednej premennej t (nemení sa bod $P(t_0)$ ani jemu zodpovedajúca normálová rovina, teda tvar kružnice pre fixované t_0 závisí iba od t).

Každá kružnica $B(t, t_0)$ má v bode $P(t_0)$ s krivkou spoločnú dotyčnicu, lebo vektor $S(t, t_0) - P(t_0)$ leží v normálovej rovine, teda je kolmý na dotykový vektor k P v $P(t_0)$. Limitnou polohou takýchto kružníc pre $t \to t_0$ je oskulačná kružnica $B(t_0)$. Takáto formulácia vysvetľuje názov „oskulačná“ – teda „najtesnejšie priložená“. „Medzi“ takto získanú kružnicu a krivku sa už nedá vpísať kružnica so stredom na hlavnej normále k $P(t_0)$ s väčším polomerom.

Opäť najprv treba vyriešiť otázku existencie kružnice $B(t, t_0)$. Dotyčnica ku krivke P v bode $P(t_0)$ je zároveň dotyčnicou ku každej kružnici prechádzajúcej $P(t_0)$ so stredom ležiacim v normálovej rovine k P v $P(t_0)$. Ak má kružnica $B(t, t_0)$ obsahovať rôzne body $P(t_0)$ aj $P(t)$, nemôžu obidva ležať na dotyčnici k P v $P(t_0)$. Teda vektory $P'(t_0)$ a $(P(t) - P(t_0))$ musia byť lineárne nezávislé. V leme 3.2, v kapitole o oskulačnej rovine sme už dokázali, že táto podmienka je splnená v neinflexných bodoch krivky. Môžme teda konštatovať, že v každom neinflexnom bode $P(t_0)$ krivky P je kružnica $B(t, t_0)$ dobre definovaná.

Ak v úvahách prejdeme k prirodzenej parametrizácii kriviek, tak aj označenie kružnice zmeníme na $B(s, s_0)$. Pristúpme k vysloveniu vety.

Veta 5.2 Je daná priestorová krivka P určená svojou prirodzenou parametrizáciou $P(s)$ na intervale I. Nech je bod $P(s_0)$ neinflexný. Nech $S(s, s_0)$ je bodová funkcia popisujúca súradnice stredov kružníc $B(s, s_0)$.

Limitou bodovej funkcie $S(s, s_0)$ pre $s \to s_0$ je stred oskulačnej kružnice krivky P v bode $P(s_0)$.

Dôkaz.

Najprv treba určiť vhodnú reprezentáciu bodu $S(s, s_0)$ tak, aby sme mohli tvrdenie o jeho limitnej polohe premeniť na počítanie limít bežných reálnych funkcií. Urobíme to podobne, ako sme to urobili s priesečníkom normál v predchádzajúcej kapitole. Bod $S(s, s_0)$ vyjadríme takto:

$$S(s, s_0) = P(s_0) + f(s)\mathbf{n}(s_0) + g(s)\mathbf{b}(s_0)$$

To znamená, že vhodnou lineárnou kombináciou vektora hlavnej normály a binormálového vektora možno posunúť bod $P(s_0)$ do $S(s, s_0)$. Bod $S(s, s_0)$ je takto vyjadrený jednoznačne, lebo vektory sú nezávislé a spolu určujú normálovú rovinu, v ktorej musí $S(s, s_0)$ nutne ležať.

Pretože má mať kružnica $B(s, s_0)$ s krivkou P spoločnú dotyčnicu v bode $P(s_0)$, a zároveň má prechádzať bodom $P(s)$, vieme o nej povedať, že celá leží v rovine určenej bodom $P(s_0)$ a vektormi $P'(s_0)$ a $(P(s) - P(s_0))$. Analyticky vyjadrené:

$$(S(s, s_0) - P(s_0))\cdot[P'(s_0)\times(P(s) - P(s_0))] = 0$$

Keďže $S(s, s_0)$ je stredom kružnice $B(s, s_0)$, na ktorej ležia body $P(s_0)$ a $P(s)$, platí, že vzdialenosti $|P(s_0)S(s, s_0)|$ a $|P(s)S(s, s_0)|$ sú totožné. Analyticky to možno vyjadriť takto:

$$|P(s_0)S(s, s_0)| = |P(s)S(s, s_0)|$$

$$(S(s, s_0) - P(s_0))^2 = (S(s, s_0) - P(s))^2$$

$$(S(s, s_0) - P(s_0))^2 = [(S(s, s_0) - P(s_0)) + (P(s_0) - P(s))]^2$$

$$2(S(s, s_0) - P(s_0))\cdot(P(s) - P(s_0)) = (P(s) - P(s_0))^2$$

Všetky tri kritériá stredu $S(s, s_0)$ sa dajú vyjadriť naraz takouto sústavou rovníc:

$$2[f(s)\mathbf{n}(s_0) + g(s)\mathbf{b}(s_0)]\cdot(P(s) - P(s_0)) = (P(s) - P(s_0))^2$$

$$[f(s)\mathbf{n}(s_0) + g(s)\mathbf{b}(s_0)]\cdot[P'(s_0)\times(P(s) - P(s_0))] = 0$$

Využime vlastnosti Frenetovho trojhranu

$$\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{b}(s_0) \times \mathbf{t}(s_0),$$

$$-\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{n}(s_0) \times \mathbf{t}(s_0)$$

a tiež vlastnosť prirodzenej parametrizácie, že $P'(s_0) = \mathbf{t}(s_0)$ a vyjadrime sústavu maticovo:

$$\begin{pmatrix} 2\,\mathbf{n}(s_0)\cdot(P(s)-P(s_0)) & 2\,\mathbf{b}(s_0)\cdot(P(s)-P(s_0)) \\ -\mathbf{b}(s_0)\cdot(P(s)-P(s_0)) & \mathbf{n}(s_0)\cdot(P(s)-P(s_0)) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P(s)-P(s_0))^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zaveďme ešte notáciu, ktorá sprehľadní ďalšie výpočty:

$$\mathbf{n}(s_0) \dashrightarrow \mathbf{n}_0; \quad \mathbf{b}(s_0) \dashrightarrow \mathbf{b}_0; \quad \mathbf{t}(s_0) \dashrightarrow \mathbf{t}_0;$$
$$\mathbf{n}(s) \dashrightarrow \mathbf{n}; \quad \mathbf{b}(s) \dashrightarrow \mathbf{b}; \quad \mathbf{t}(s) \dashrightarrow \mathbf{t};$$

$$P(s) - P(s_0) \dashrightarrow \mathbf{d},$$

pričom vieme, že v prirodzenej parametrizácii platí, že $\mathbf{d}' = \mathbf{t}$, $\mathbf{d}'' = \mathbf{t}'$, atď. Teraz už môžeme vyjadriť funkcie $f(s)$ a $g(s)$ Cramerovým pravidlom [9].

$$f(s) = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{d}^2 & 2\,\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d} \\ 0 & \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\,\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d} & 2\,\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d} \\ -\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d} & \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}} \quad ; \quad g(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2\,\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d} & \mathbf{d}^2 \\ -\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\,\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d} & 2\,\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d} \\ -\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d} & \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}}$$

Nájsť limitnú polohu bodu $S(s, s_0)$ znamená, že vyrátame limity funkcií f(s) a $g(s)$ pre $s \to s_0$. Obidva výpočy vedú k štvornásobnému použitiu L'Hospitalovho pravidla.

$$\lim_{s\to s_0} f(s) = \lim_{s\to s_0} \frac{\mathbf{d}^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})}{2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})^2 + 2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})^2} = \lim_{s\to s_0} \frac{2(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d}) + \mathbf{d}^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})}{4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}) + 4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})} =$$

$$= \lim_{s\to s_0} \frac{2\mathbf{t}^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d}) + 2(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d}) + 4(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}) + \mathbf{d}^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}')}{4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})^2 + 4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}') + 4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})^2 + 4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')} =$$

$$= \lim_{s\to s_0} \frac{6(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d}) + 6\,\mathbf{t}^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}) + 2(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}'')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d}) + 6(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}) + 6(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}') + \mathbf{d}^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'')}{12(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}') + 4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'') + 12(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}') + 4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}'')} =$$

V poslednom kroku zlomok „roztrhneme“ do dvoch riadkov. Pri interpretácii zápisu stačí zlomok prirodzene nadviazať na príslušných miestach naznačených bodkami.

$$= \lim_{s\to s_0} \frac{6(\mathbf{t}')^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d}) + 8(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}'')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d}) + 24(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}) + 12(\mathbf{t})^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}') + \ldots}{12(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}')^2 + 16(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'') + 4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}''') + \ddots}$$

$$\frac{\ldots + 2(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}''')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d}) + 8(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}'')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}) + 12(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}') + 8(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'') + \mathbf{d}^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}''')}{\ddots + 12(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')^2 + 16(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}'') + 4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}''')}$$

Po dosadení s_0 ostanú nenulové iba členy $12(\mathbf{t}_0)^2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'_0)$ v čitateli a $12(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'_0)^2$ v menovateli. Všetky ostatné výrazy budú obsahovať skalárny súčin kolmých vektorov alebo súčin s vektorom $\mathbf{d}(s_0)$, a preto sa rovnajú 0. Pretože pracujeme s prirodzenou parametrizáciou platí, že $|\mathbf{t}(s_0)| = 1$, a preto výsledná limita bude vyzerať takto:

$$\lim_{s\to s_0} f(s)=\frac{12(\mathbf{t}(s_0))^2(\mathbf{n}(s_0)\cdot\mathbf{t}'(s_0))}{12(\mathbf{n}(s_0)\cdot\mathbf{t}'(s_0))^2}=\frac{\dfrac{P''(s_0)\cdot P''(s_0)}{|P''(s_0)|}}{\left(\dfrac{P''(s_0)\cdot P''(s_0)}{|P''(s_0)|}\right)^2}=\frac{|P''(s_0)|}{(|P''(s_0)|)^2}=\frac{1}{|P''(s_0)|}=\frac{1}{k(s_0)}$$

Výpočet limity $g(s)$ pre $s\to s_0$ vyzerá podobne:

$$\lim_{s\to s_0} g(s)=\lim_{s\to s_0}\frac{\mathbf{d}^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})}{2(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})^2+2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})^2}=\lim_{s\to s_0}\frac{2(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})+\mathbf{d}^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})}{4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})+4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})}=$$

$$=\lim_{s\to s_0}\frac{2\mathbf{t}^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})+2(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})+4(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})+\mathbf{d}^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')}{4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})^2+4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}')+4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})^2+4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')}=$$

$$=\lim_{s\to s_0}\frac{6(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})+6\mathbf{t}^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})+2(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}'')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})+6(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})+6(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')+\mathbf{d}^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}'')}{12(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}')+4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'')+12(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')+4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}'')}=$$

$$=\lim_{s\to s_0}\frac{6(\mathbf{t}')^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})+8(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}'')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})+24(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})+12(\mathbf{t}')^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')+\ldots}{12(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}')^2+16(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'')+4(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}''')+\ddots}$$

$$\frac{\ldots+2(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}''')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{d})+8(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}'')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})+6(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t}')(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')+8(\mathbf{d}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}'')+\mathbf{d}^2(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}''')}{\ddots+12(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}')^2+16(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}'')+4(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t})(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{t}''')}$$

Po dosadení s_0 sú všetky členy súčtu v čitateli rovné nule. V menovateli ostane výraz $12(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{t}'_0)^2$ jediným nenulovým členom:

$$\lim_{s\to s_0} g(s)=\frac{0}{12(\mathbf{n}(s_0)\cdot\mathbf{t}'(s_0))^2}=\frac{0}{12|P''(s_0)|^2}=\frac{0}{12k^2(s_0)}=0.$$

Zistili sme, že limitnou polohou stredu $S(s, s_0)$ pre $s\to s_0$ je naozaj bod $P(s_0) + r(s_0)\mathbf{n}(s_0)$.

□

Teraz už stačí len doplniť, že kružnica $B(s, s_0)$ leží vždy v rovine určenej bodom $P(s_0)$ a vektormi $P'(s_0)$ a $(P(s) - P(s_0))$. V kapitole 3 o oskulačnej rovine sme pracovali presne s takouto rovinou a nazývali sme ju $\pi(s)$. Dokázali sme o nej, že jej limitnou polohou pre pre $s\to s_0$ je oskulačná rovina krivky P v bode $P(s_0)$. Pretože kružnica $B(s, s_0)$ v tejto rovine leží pre každé s, bude v limitnej polohe ležať v oskulačnej rovine. Tým pádom spĺňa všetky podmienky z definície 5.1, teda je oskulačnou kružnicou.

6. Obálka jednoparametrickej sústavy priamok

Posledný problém, ktorým sa v tejto práci budeme zaoberať, sa od ostatných mierne odlišuje. Ostaneme, samozrejme, pri štúdiu kriviek. Zameriame sa však na *obálky* jednoparametrickej *sústavy* priamok, to znamená, že budeme skúmať krivky, ktoré sú určené nekonečným systémom priamok.

Uveďme najprv definíciu jednoparametrického sytému kriviek a jeho obálky tak, ako sa bežne zavádza v literatúre [3], [10].

Definícia 6.1 Je daná hladká číselná funkcia $F(x, y, \alpha)$ definovaná na množine $D \times J$, kde $D \subset \boldsymbol{R}^2$, $J \subset \boldsymbol{R}$. Pre každé $\alpha \in J$ vzniká funkcia $F_\alpha(x, y) = F(x, y, \alpha)$, definovaná v oblasti D. Predpokladáme, že funkcia F_α má všade nenulový gradient a množina riešení rovnice $F_\alpha(x, y) = 0$ je neprázdna. Vtedy riešením rovnice $F_\alpha(x, y) = 0$ je krivka, ktorú budeme označovať C_α. To znamená, že rovnica

$$F(x, y, \alpha) = 0,\ (x, y) \in D,\ \alpha \in J$$

určuje *jednoparametrickú sústavu kriviek* $(C_\alpha)_{\alpha \in J}$ v rovine. Premennú α nazývame parameter sústavy kriviek.

Obálka jednoparametrickej sústavy kriviek C_α: $F(x, y, \alpha) = 0$, $(x, y) \in D$, $\alpha \in J$ je regulárna parametrizovaná krivka $P(t)$, $t \in I$, pre ktorú platí

i. $I \subset J$,
ii. $P(\alpha) \in C_\alpha$ pre všetky $\alpha \in I$,
iii. Pre každé $\alpha \in I$ majú C_α a $P(t)$ v ich spoločnom bode $P(\alpha)$ rovnakú dotyčnicu.

K obálkam sa dá pristúpiť aj inak – napríklad v [5], [14] sa zadáva aj sústava kriviek parametricky. Inde sa študujú nielen krivky v rovine, či priestore, ale aj všeobecne – sústavy ľubovoľnorozmerných variet v $\boldsymbol{R}^n$. V tomto texte však budeme iba s obálkou *jednoparametrickej sústavy S priamok* p_α. Tá nech je daná rovnicou:

$$a(\alpha)x + b(\alpha)y + c(\alpha) = 0, \qquad \alpha \in \mathrm{J};\ a(\alpha),\ b(\alpha),\ c(\alpha) \text{ sú hladké číselné funkcie.}$$

Obálka sústavy S je potom taká regulárna parametrizovaná krivka P, ktorá spĺňa body i.-iii. v definícii, pričom ii. a iii. možno takto upresniť:

*ii. $P(\alpha) \in p_\alpha$ pre všetky $\alpha \in I$,
*iii. Pre každé $\alpha \in \mathrm{I}$ je p_α dotyčnicou krivky P v bode $P(\alpha)$.

Pre obálku jednoparametrickej sústavy kriviek v rovine je v učebnom texte [3] dokázaná veľmi užitočná veta. Jej verzia pre jednoparametrickú sústavu priamok vyzerá nasledovne:

Veta 6.2 Regulárna krivka $P(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subset J$ je obálkou jednoparametrickej sústavy priamok p_α: $a(\alpha)x + b(\alpha)y + c(\alpha) = 0$, $\alpha \in J$ práve vtedy, keď pre všetky $\alpha \in I$ platí

i. $a(\alpha)x(\alpha) + b(\alpha)y(\alpha) + c(\alpha) = 0$
ii. $a'(\alpha)x(\alpha) + b'(\alpha)y(\alpha) + c'(\alpha) = 0.$

Táto veta umožňuje efektívne vypočítavanie obálok. Za interval I možno vziať najväčší taký podinterval intervalu J, že pre α z neho platí:

$$\begin{vmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ a'(\alpha) & b'(\alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Uviedli sme definíciu obálky, aj vetu vhodnú pre praktické výpočty. Definícia je pomerne prehľadná na to, aby sme vedeli v jednoduchých obrázkoch odhadnúť tvar obálky. Geometrickú intuíciu si dokonca možno ľahko vycibriť jednoduchým cvičením: nakreslíme si ľubovoľnú krivku v rovine, k nej odhadom nakreslíme dostatočne veľa dotyčníc a spätne pôvodnú krivku prehlásime za obálku nakreslenej sústavy priamok.

V inom opise obálky, ktorý je tiež založený na vizuálnej predstave, sa hovorí, že každý bod obálky je priesečníkom dvoch „susedných" priamok z jednoparametrickej sústavy priamok. Ak namiesto nepresného pojmu „susednosti" použijeme hlavnú myšlienku každej kapitoly tejto práce – *limitný prechod* – dostaneme peknú a dokázateľnú vetu.

Nech je daná jednoparametrická sústava S priamok p_α pre $\alpha \in J$ lineárnymi rovnicami

$$a(\alpha)x + b(\alpha)y + c(\alpha) = 0.$$

Vyberme niektorý parameter $\alpha_0 \in J$, a tento „fixujme". Priesečník priamok p_{α_0} a p_α pre nejaké iné číslo α z okolia α_0 v intervale parametrov J označme $X(\alpha_0, \alpha)$. Limitnú polohu tohto priesečníka pre $\alpha \to \alpha_0$ označme $X(\alpha_0)$. Dokážeme, že bod $X(\alpha_0)$ je bodom z obálky sústavy priamok, nech úvahu zopakujeme pre ktorékoľvek *vhodne zvolené* $\alpha_0 \in J$.

Ako *vhodne voliť* $\alpha_0 \in J$? Potrebujeme zodpovedať otázku, pre aké α_0 existuje okolie $O(\alpha_0)$, v ktorom pre všetky čísla α existujú priesečníky priamok p_{α_0} a p_α. Odpovieme si nasledujúcou lemou.

Lema 6.3 Je daná jednoparametrická sústava S priamok p_α rovnicami $a(\alpha)x + b(\alpha)y + c(\alpha) = 0$. Ak pre $\alpha_0 \in J$ platí, že

$$\begin{vmatrix} a(\alpha_0) & b(\alpha_0) \\ a'(\alpha_0) & b'(\alpha_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

tak existuje rýdze okolie $O(\alpha_0)$ parametra α_0 v J také, že pre každé α z tohto okolia existuje priesečník $X(\alpha_0, \alpha)$.

Dôkaz. Priesečník $X(\alpha_0, \alpha)$ existuje práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} a(\alpha_0) & b(\alpha_0) \\ a(\alpha) & b(\alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zaveďme si pomocnú funkciu $G(\alpha_0, \alpha) = a(\alpha_0)b(\alpha) - a(\alpha)b(\alpha_0)$. Derivácia tejto funkcie je $G'(\alpha_0, \alpha) = a(\alpha_0)b'(\alpha) - a'(\alpha)b(\alpha_0)$. Ďalej si všimnime, že $G'(\alpha_0, \alpha_0) = a(\alpha_0)b'(\alpha_0) - a'(\alpha_0)b(\alpha_0)$, čo je presne predpis determinantu z predpokladu lemy. Tvrdenie lemy teda možno skrátene zapísať tak, že $G'(\alpha_0, \alpha_0) \neq 0$ implikuje $G(\alpha_0, \alpha) \neq 0$ pre nejaké $O(\alpha_0)$. Teraz pristúpme k nepriamemu dôkazu.

Nech pre každé $O(\alpha_0)$ existuje také $\alpha_n \in J$, že $G(\alpha_0, \alpha_n) = 0$.

Vezmime postupnosť do seba zapadajúcich okolí $O_1(\alpha_0) \subset O_2(\alpha_0) \subset \ldots \subset O_n(\alpha_0) \subset \ldots$ a k nim prislúchajúcu postupnosť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ Z konštrukcie postupnosti $\{\alpha_n\}$ vyplýva jej konvergencia k α_0. Potom však možno uvažovať o $G'(\alpha_0, \alpha_0)$ takto:

$$G'(\alpha_0, \alpha_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{G(\alpha_0, \alpha_n) - G(\alpha_0, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{0-0}{\alpha_n - \alpha_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\alpha_n - \alpha_0}.$$

Preto podľa Heineho definície limity $G'(\alpha_0, \alpha_0)$ alebo neexistuje alebo sa rovná 0.

□

V leme sme ukázali, že o priesečníku $X(\alpha_0, \alpha)$ možno uvažovať pre všetky α_0 z J také, že $G'(\alpha_0, \alpha_0)$ je rôzne od 0. Ak vezmeme najväčší taký podinterval intervalu J, že pre všetky α z neho platí $G'(\alpha, \alpha) \neq 0$, dostaneme presne interval I z vety o obálke. Ak teda teraz dokážeme, že limitou $X(\alpha_0, \alpha)$ pre $\alpha \to \alpha_0$ je skutočne bod obálky, tak zopakovaním úvahy pre všetky α z intervalu I získame parametrizáciu $X(\alpha)$ celej obálky.

Veta 6.4 Je daná sústava S priamok p_α pre $\alpha \in J$ lineárnymi rovnicami

$$a(\alpha)x + b(\alpha)y + c(\alpha) = 0.$$

Parametrizácia $X(\alpha)$, $\alpha \in I \subset J$ je parametrizáciou obálky S.

Dôkaz. V dôkaze využijeme tvrdenie vyššie uvedenej vety 6.2. Súradnice bodu $P(\alpha_0) = (x(\alpha_0), y(\alpha_0))$ obálky spĺňajú sústavu rovníc

$$a(\alpha_0)x(\alpha_0) + b(\alpha_0)y(\alpha_0) + c(\alpha_0) = 0$$
$$a'(\alpha_0)x'(\alpha_0) + b'(\alpha_0)y'(\alpha_0) + c'(\alpha_0) = 0$$

Vyjadrime teraz $X(\alpha_0, \alpha)$, vypočítajme limitu $X(\alpha_0, \alpha)$ pre $\alpha \to \alpha_0$ a overme, či vyhovuje sústave. Súradnice bodu $X(\alpha_0, \alpha)$ sú riešením sústavy

$$a(\alpha_0)x + b(\alpha_0)y + c(\alpha_0) = 0$$
$$a(\alpha)x + b(\alpha)y + c(\alpha) = 0$$

Reprezentujme túto sústavu maticovo:

$$\begin{bmatrix} a(\alpha_0) & b(\alpha_0) \\ a(\alpha) & b(\alpha) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c(\alpha_0) \\ -c(\alpha) \end{bmatrix}$$

Determinant štvorcovej matice na ľavej strane je, podľa lemy, nenulový. Potom môžeme na vyjadrenie riešenia použiť Cramerove formuly:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c(\alpha_0) & b(\alpha_0) \\ -c(\alpha) & b(\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(\alpha_0) & b(\alpha_0) \\ a(\alpha) & b(\alpha) \end{vmatrix}} = \frac{b(\alpha_0)c(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b(\alpha) - a(\alpha)b(\alpha_0)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a(\alpha_0) & -c(\alpha_0) \\ a(\alpha) & -c(\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(\alpha_0) & b(\alpha_0) \\ a(\alpha) & b(\alpha) \end{vmatrix}} = \frac{a(\alpha)c(\alpha_0) - a(\alpha_0)c(\alpha)}{a(\alpha_0)b(\alpha) - a(\alpha)b(\alpha_0)}$$

Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu limít. Budeme rátať limity dvoch číselných funkcií. Súradnice x a y bodu $X(\alpha_0, \alpha)$, ktoré sme vyjadrili pomocou Cramerových formúl sú v skutočnosti funkciami s premennými α a α_0. Nás zaujímajú limity súradníc pre $\alpha \to \alpha_0$. Vo výpočte použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} x(\alpha_0, \alpha) = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{b(\alpha_0)c(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b(\alpha) - a(\alpha)b(\alpha_0)} = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{b(\alpha_0)c'(\alpha) - b'(\alpha)c(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha) - a'(\alpha)b(\alpha_0)} =$$

$$= \frac{b(\alpha_0)c'(\alpha_0) - b'(\alpha_0)c(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0) - a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}$$

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} y(\alpha_0, \alpha) = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{a(\alpha)c(\alpha_0) - a(\alpha_0)c(\alpha)}{a(\alpha_0)b(\alpha) - a(\alpha)b(\alpha_0)} = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{a'(\alpha)c(\alpha_0) - a(\alpha_0)c'(\alpha)}{a(\alpha_0)b'(\alpha) - a'(\alpha)b(\alpha_0)} =$$

$$= \frac{a'(\alpha_0)c(\alpha_0) - a(\alpha_0)c'(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0) - a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}$$

Získali sme teda parametrizáciu

$$X(\alpha) = \left(\frac{b(\alpha)c'(\alpha) - b'(\alpha)c(\alpha)}{a(\alpha)b'(\alpha) - a'(\alpha)b(\alpha)} ; \frac{a'(\alpha)c(\alpha) - a(\alpha)c'(\alpha)}{a(\alpha)b'(\alpha) - a'(\alpha)b(\alpha)} \right),$$

pre $\alpha \in I \subset J$ také, že $a(\alpha)b'(\alpha) - a'(\alpha)b(\alpha) \neq 0$.

Overme teraz, či vyhovuje podmienkam pre obálku podľa vety 6.2. Prvú podmienku overíme poľahky:

$$a(\alpha_0)\frac{b(\alpha_0)c'(\alpha_0)-b'(\alpha_0)c(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}+b(\alpha_0)\frac{a'(\alpha_0)c(\alpha_0)-a(\alpha_0)c'(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}+c(\alpha_0)=$$

$$=\frac{a(\alpha_0)b(\alpha_0)c'(\alpha_0)-a(\alpha_0)b'(\alpha_0)c(\alpha_0)+a'(\alpha_0)b(\alpha_0)c(\alpha_0)-a(\alpha_0)b(\alpha_0)c'(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}+$$

$$+\frac{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)c(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)c(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}=0$$

Ostáva ešte preveriť druhú podmienku:

$$a'(\alpha_0)\frac{b(\alpha_0)c'(\alpha_0)-b'(\alpha_0)c(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}+b'(\alpha_0)\frac{a'(\alpha_0)c(\alpha_0)-a(\alpha_0)c'(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}+c'(\alpha_0)=$$

$$=\frac{a'(\alpha_0)b(\alpha_0)c'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b'(\alpha_0)c(\alpha_0)+a'(\alpha_0)b'(\alpha_0)c(\alpha_0)-a(\alpha_0)b'(\alpha_0)c'(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}+$$

$$+\frac{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)c'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)c'(\alpha_0)}{a(\alpha_0)b'(\alpha_0)-a'(\alpha_0)b(\alpha_0)}=0$$

Úvaha platí pre ľubovoľné $\alpha_0 \in J$, preto sme naozaj získali parametrizáciu obálky.

□

7. O ilustráciách a CD prílohe

Ťažiskom tejto práce boli teoretické výsledky prezentované v predchádzajúcich kapitolách. Súčasťou zadania však bolo aj vytvoriť k problémom ilustrácie. K samotným definíciám pojmov, ktorými sme sa zaoberali, existuje na internete množstvo voľne prístupných kvalitných obrázkov. Stačí zájsť na slobodnú encyklopédiu Wikipédiu [13] alebo MathWorld [14], prípadne vyhľadať niečo iné – dostupných je aj mnoho dynamických Java appletov.

Našu ilustrátorskú činnosť sme teda zamerali na animované obrázky, ktoré majú uľahčiť pochopenie opisov limitných procesov, ktorými sme sa zaoberali v teoretickej časti práce. Výsledkom sú tri animácie vo formáte gif, ktoré možno nájsť na priloženom dátovom CD.

Súbor `dotycnica.gif` znázorňuje, že dotyčnicu ku krivke možno vnímať ako limitnú polohu sečnice krivky, ak sa jeden pohyblivý bod blíži k druhému – fixnému. Krivkou v animácii je graf kvadratickej funkcie. Jednotlivé obrazové políčka animácie boli vygenerované jednoduchou aplikáciou napísanou v jazyku `C++`.

Súbor `oskulacna.gif`, vznikol rovnakou technológiou a zobrazuje rovinnú interpretáciu oskulačnej kružnice.

Súbor `obalka.gif`, najprv symbolicky približuje definíciu jednoparametrickej sústavy priamok v rovine, potom definíciu obálky a nakoniec znázorňuje, že bod obálky možno chápať ako limitnú polohu priesečníka fixnej priamky s ostatnými priamkami sústavy.

K všetkým týmto súborom sa dá jednoducho dostať prostredníctvom stránky `diplomovka.htm`, ktorá by sa mala po načítaní CD sama spustiť. Stránka v krátkosti predstavuje túto prácu, vytvára príjemné prostredie pre prehliadanie animácií a dopĺňa ich krátkymi doplňujúcimi komentármi. Stránka bola vytvorená v jazyku `HTML` v slobodnom editovacom prostredí `PSPad` [12].

V prípadie zlyhania automatického načítania stránky obsahuje CD súbor s inštrukciami `citaj_ma.txt`.

8. Záver

O čom bola táto práca? Na začiatku sme si stanovili cieľ – geometricky interpretovať päť pojmov z diferenciálnej geometrie pomocou limitného procesu. To sa nám aj podarilo. Zrekapitulujme si obsah kapitol:

V kapitole o dotyčnici sme dokázali, že v regulárnom bode $P(t_0)$ krivky P určenej parametrizáciou $P(t)$ na intervale I, možno dotyčnicu k P chápať ako limitnú polohu sečnice krivky P cez bod $P(t_0)$ a bod $P(t)$, pre t z rýdzeho okolia t_0, ktorý sa „blíži“ k bodu $P(t_0)$. Najprv sme ukázali, že v regulárnom bode $P(t_0)$ platí, že pre každé okolie parametra t_0 existuje také t, že $P(t_0)$ je bod rôzny od $P(t)$. Tým sme ukázali na korektnosť zadania sečnice. Potom sme dokázali samotnú vetu.

V kapitole o oskulačnej rovine sme najprv definovali rovinu $\pi(t)$ ako rovinu prechádzajúcu dotyčnicou ku krivke P v neinflexnom bode $P(t_0)$ a iným bodom krivky $P(t)$. Pre t blížiace sa k t_0 sa $P(t)$ blíži k $P(t_0)$ a rovina $\pi(t)$ sa otáča okolo dotyčnice. Limitnou polohou roviny $\pi(t)$ je oskulačná rovina krivky v bode $P(t_0)$. Ukázali sme, že rovina $\pi(t)$ je pre neinflexné body krivky skutočne dobre definovaná, a potom sme vetu dokázali.

S pojmom stredu krivosti sme sa vysporiadali dvakrát. Pre rovinný aj pre priestorový prípad. Stred krivosti planárnej krivky pre neinflexný bod možno získať ako limitnú polohu bodu $X(t, t_0)$, ktorý je priesečníkom normál ku krivke vedeným cez body $P(t)$ a $P(t_0)$. V priestorovej verzii tvrdenia je bod $X(t, t_0)$ definovaný ako priesečník normálovej roviny ku krivke v bode $P(t)$ a hlavnej normály ku krivke v bode $P(t_0)$.

Oskulačnú kružnicu priestorovej krivky sme získali ako limitnú polohu kružnice, ktorej stred leží v normálovej rovine neinflexného bodu $P(t_0)$, a ktorá prechádza bodmi $P(t_0)$ a $P(t)$.

Poslednou teoretickou kapitolou sme ukázali, že obálku jednoparametrickej sústavy priamok možno tiež získať limitným procesom. V sústave sme „fixovali“ parameter $\alpha_0 \in J$. Limitnou polohou priesečníka priamok p_{α_0} a p_α pre čísla α z okolia α_0 v intervale parametrov J, pre $\alpha \to \alpha_0$ je naozaj bod obálky sústavy. Presnejšie, je to ten bod obálky, v ktorom je p_α obálke dotyčnicou.

V týchto dôkazoch sme využívali mnohé postupy známe z diferenciálneho počtu – Heineho definíciu limity, L'Hospitalovo pravidlo, Taylorov rozvoj, ale aj triky založené na analytickom vyjadrení geometrických skutočností.

Samostatnou časťou práce je niekoľko malých animácií, ktoré majú uľahčiť chápanie opísaných limitných dejov, a hovorili sme o nich v samostatnej kapitole.

Na záver sa možno zamyslieť nad možnými pokračovaniami myšlienok ponúknutých v tejto práci. Na kapitolu o oskulačnej kružnici by sa prirodzene dalo nadviazať štúdiom oskulačnej sféry, o ktorej možno vysloviť podobnú geometrickú vetu ako sme vyslovili o kružnici.

Kapitola o jednoparametrickej sústave priamok v rovine ponúka hneď niekoľko možných pokračovaní. Napríklad by sa dala študovať obálka sústavy kriviek. Samozrejme, toto je už o niečo ťažší problém, pretože dve krivky sústavy môžu mať viac než len jeden spoločný bod. Iným možným rozšírením kapitoly o jednoparametrickej sústave priamok sa ponúka v štúdiu jednoparametrickej sústavy priamok v priestore. Jednoparametrická sústava priamok v priestore vlastne definuje priamkovú plochu. Aký tvar a vlastnosti má obálka takejto sústavy? Dá sa o nej dokázať podobná veta? Čím nahradiť priesečníky, ak sú priamky sústavy mimobežné?

To už sú však otázky pre niekoho iného a na inokedy.

9. Zoznam použitej literatúry

[1] BOŽEK, M. *Úvod do diferenciálnej geometrie pre učiteľov.* Elektronický učebný materiál.

[2] BOŽEK, M. *Krivky 1.* Elektronický učebný materiál.

[3] BOŽEK, M. *Krivky 2.* Elektronický učebný materiál.

[4] BUDINSKÝ, B. 1983. *Analytická a diferenciální geometrie.* Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1983. 296 s.

[5] GIBSON, C. G. 2001. *Elementary Geometry of Differentiable Curves.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 220 p.

[6] HEJNÝ, M. et. al. 1983. *Čo je topológia?* Bratislava: Alfa, 1983. 240 s.

[7] HORÁČEK, J. et. al. 2006. *Ako písať záverečnú bakalársku a diplomovú prácu.* Žilina: Žilinská univerzita, 2006. 34 s.

[8] JARNÍK, V. 1984. *Diferenciální počet (I)*. Praha: Academia, 1984. 392s.

[9] KORBAŠ, J. 2003. *Lineárna algebra a geometria I.* Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2003. 240 s.

[10] RUTTER, J. W. 2000. *Geometry of Curves.* Boca Raton: Chapman & Hall, 2000. 384 p.

Internetové dokumenty:

[11] History of curvature (13. 3. 2009): http://www3.villanova.edu/maple/misc/history_of_curvature/k.htm

[12] PSPad (26. 4. 2009): http://www.pspad.com/

[13] Wikipédia (26. 4. 2008): http://en.wikipedia.org/wiki/

[14] Wolfram MathWorld (26. 4. 2009): http://mathworld.wolfram.com/